Лекция 10
ПРИМЕНЕНИЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ К ВОПРОСАМ ПОЛНОТЫ

Рассмотрим применение целых функций к вопросам полноты.

Лемма 10.1. Пусть последовательность $\{f_n(z)\}$ такая, что $f_n(z) \in A(|z| \le R < +\infty)$ $\forall n \in \mathbb{C}$ и сходится в $L_2(|z| = R)$, тогда последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится равномерно внутри круга $|z| < R$.

Доказательство. Сходимость последовательности $\{f_n(z)\}$ в $L_2(|z| = R)$ означает, что $\forall \varepsilon > 0$

$$\oint\limits_{|z|=R} \left|f_n(z) - f_m(z)\right|^2 ds < \varepsilon, \quad n, m > N(\varepsilon).$$

Для $|z| \le r < R$ имеем $f_n(z) - f_m(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=R} \dfrac{f_n(t) - f_m(t)}{t - z} dt,$ поэтому

$$\left|f_n(z) - f_m(z)\right| \le \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R - r} \int\limits_{|t|=R} \left|f_n(t) - f_m(t)\right| ds.$$

Используя неравенство Гельдера

$$\int\limits_{|z|=R} \left|f_n(t) - f_m(t)\right| ds \le \left(\int\limits_{|z|=R} \left|f_n(t) - f_m(t)\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_{|z|=R} ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

получим, что $\left|f_n(z) - f_m(z)\right| \le \dfrac{\sqrt{R}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{R - r}, \quad n, m > N(\varepsilon).$

Заметим, что сходимость внутри области эквивалентна сходимости на любом круге, лежащем в этой области. Лемма доказана. ■

Рассмотрим односвязную ограниченную область D и систему функций $\{\varphi_k(z)\}$, $\varphi_k(z) \in A(D)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Определение. Множество M — ***линейная оболочка системы*** $\{\varphi_k(z)\}$, если любую функцию $\varphi(z) \in M$ можно представить как предел

$$\varphi(z) = \lim_{k \to \infty} \sum_{\nu=1}^{p_k} a_{k_\nu} \varphi_\nu(z), \quad z \in D,$$

сходимость внутри области D равномерная.

Теорема 10.1. Если функция $A(z) \notin M$, то существует линейный непрерывный функционал $l(f)$ такой, что

$$l(f) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \gamma(t) f(t)dt,$$

где C — контур, лежащий в области D, функция $\gamma(t)$ аналитична на контуре C и вне C, $\gamma(\infty) = 0$, при этом

$$l(\varphi_k) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad l(A) \neq 0.$$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем в несколько этапов. Сначала рассмотрим случай, когда область $D = \{z\colon |z| < 1\}$.

Итак, пусть функция $A(z) \notin M$, тем самым существует круг $|z| \le r_0 < 1$, в котором функция $A(z)$ не может быть представлена в виде предела последовательности линейных комбинаций функций из системы $\{\varphi_k(z)\}$.

Возьмем $R\colon 0 < r_0 < R < 1$, и пусть функции $f(z)$, $\varphi(z) \in A(|z| < 1)$. Введем скалярное произведение

$$(f, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R \cdot e^{i\varphi})\overline{\varphi(R \cdot e^{i\varphi})}d\varphi.$$

Заметим, что

$$(f, \varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\overline{\varphi}\left(\frac{R^2}{z}\right)\frac{dz}{z},$$

причем если $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, то $\overline{\varphi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b}_n z^n$. Если r близко к R, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\overline{\varphi}\left(\frac{R^2}{z}\right)\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)\overline{\varphi}\left(\frac{R^2}{z}\right)\frac{dz}{z}.$$

Пусть $0 < r < R$, r близко к R. Ортогонализуем систему $\{\varphi_k(z)\}$ на окружности $|z| = R$, построим новую ортогональную систему $\{\psi_k(z)\}$.

Образуем ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(A, \psi_k)\psi_k(z)$. Он сходится на окружности $|z| = R$ в L_2. По лемме 10.1 этот ряд сходится равномерно внутри круга $|z| < R$, но не к функции $A(z)$. Тем самым функция

$$F(z) = A(z) - \sum_{k=1}^{\infty}(A, \psi_k)\psi_k(z) \not\equiv 0, \quad z \in \{|z| < R\}.$$

Имеем

$$(F, \psi_k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} F(z)\overline{\psi}_k\left(\frac{R^2}{z}\right)\frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \left[A(z) - \sum_{m=1}^{\infty}(A, \psi_m)\psi_m(z)\right]\overline{\psi}_k\left(\frac{R^2}{z}\right)\frac{dz}{z} =$$

$$= (A, \psi_k) - (A, \psi_k) = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(re^{i\varphi})\overline{\psi}_k\left(\frac{R^2}{r}e^{-i\varphi}\right)d\varphi = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \overline{F}(re^{-i\varphi})\psi_k\left(\frac{R^2}{r}e^{i\varphi}\right)d\varphi = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Положим $t = \dfrac{R^2}{r}e^{i\varphi}$, отсюда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=\frac{R^2}{r}} \overline{F}\left(\frac{R^2}{t}\right)\psi_k(t)\frac{dt}{t} = 0.$$

Так как функции $\varphi_k(z)$ есть конечные линейные комбинации систем функций из $\{\varphi_m(z)\}$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=\frac{R^2}{r}} \overline{F}\left(\frac{R^2}{t}\right)\varphi_k(t)\frac{dt}{t} = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Положим $\gamma(t) = \dfrac{1}{t}\overline{F}\left(\dfrac{R^2}{t}\right)$. Функция $\overline{F}(z) \in A(|z| < R)$, поэтому функция $\gamma(t) \in A(|t| > R)$, $\gamma(\infty) = 0$. Отметим, что при r, близком к R, имеем $R < \dfrac{R^2}{r} < 1$.

Убедимся, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=\frac{R^2}{r}} \overline{F}\left(\frac{R^2}{t}\right)A(t)\frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=\frac{R^2}{r}} \gamma(t)A(t)dt = Q \neq 0.$$

Итак, $Q = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \overline{F}(re^{-i\varphi})A\left(\frac{R^2}{r}e^{i\varphi}\right)d\varphi$, тогда

$$\overline{Q} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(re^{i\varphi})\overline{A}\left(\frac{R^2}{r}e^{-i\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[A(re^{i\varphi}) - \sum_{k=1}^{\infty}(A,\psi_k)\psi_k(re^{i\varphi})\right]\overline{A}\left(\frac{R^2}{r}e^{-i\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} A(re^{i\varphi})\overline{A}\left(\frac{R^2}{re^{i\varphi}}\right)d\varphi - \sum_{k=1}^{\infty}(A,\psi_k)\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi_k(re^{i\varphi})\overline{A}\left(\frac{R^2}{re^{i\varphi}}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r} A(z)\overline{A}\left(\frac{R^2}{t}\right)\frac{dz}{z} - \sum_{k=1}^{\infty}(A,\psi_k)\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r}\psi_k(z)\overline{A}\left(\frac{R^2}{t}\right)\frac{dz}{z}.$$

Так как r близко к R, заменим интегрирование на $|z| = R$. Поэтому

$$\overline{Q} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=R} A(z)\overline{A}\left(\frac{R^2}{z}\right)\frac{dz}{z} - \sum_{k=1}^{\infty}(A,\psi_k)\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=R}\psi_k(z)\overline{A}\left(\frac{R^2}{z}\right)\frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} A(R\cdot e^{i\varphi})\overline{A(R\cdot e^{i\varphi})}d\varphi - \sum_{k=1}^{\infty}(A,\psi_k)\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi_k(R\cdot e^{i\varphi})\overline{A(R\cdot e^{i\varphi})}d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|A(R\cdot e^{i\varphi})\right|^2 d\varphi - \sum_{k=1}^{\infty}(A,\psi_k)\cdot\overline{(A,\psi_k)} = \|A\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty}\left|(A,\psi_k)\right|^2 \neq 0,$$

так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(A,\psi_k)\psi_k(z)$ сходится в $L_2(|z| = R)$, но не к $A(z)$.

Итак, линейный непрерывный функционал

$$l(f) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=\frac{R^2}{r}}\gamma(t)f(t)dt$$

есть искомый функционал.

Перейдем к случаю, когда область D — *односвязная область, отличная от всей плоскости, граница области состоит более чем из одной точки*. По теореме Римана существует конформное отображение единичного круга $|\omega| < 1$ на область D. Пусть $z = \psi(\omega)$ — конформное отображение. Положим $f_k(\omega) = \varphi_k[\psi(\omega)]$, $B(\omega) = A[\psi(\omega)]$. Так как функция $A(z)$ не принадлежит линейной оболочке M, то $B(\omega)$ не принадлежит линейной оболочке $\{f_k(\omega)\}$. По уже доказанному для единичного круга линейный непрерывный функционал $l(f)$

$$l(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\omega|=r<1} \eta(\omega) f(\omega) d\omega$$

таков, что $l(fk) = 0$, $l(B) \neq 0$, $\eta(\omega)$ аналитична при $|\omega| \geq r$ и $\eta(\infty) = 0$. Пусть $\omega = \zeta(z)$ — функция, обратная к функции $z = \psi(\omega)$. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \eta[\zeta(z)] \zeta'(z) \varphi_k(z) dz = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \eta[\zeta(z)] \zeta'(z) A(z) dz \neq 0,$$

где C — образ окружности $|\omega| = r$ при отображении $z = \psi(\omega)$. Функция $\eta[\zeta(z)]\zeta'(z)$ аналитична и однозначна на контуре C и вне контура C, но в области D. Ее можно представить в виде $\eta[\zeta(z)]\zeta'(z) = \gamma(z) + \alpha(z)$, где функция $\alpha(z)$ аналитична на C и внутри C, а функция $\gamma(z)$ аналитична на C и вне C, при этом $\gamma(\infty) = 0$. Тем самым

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \gamma(t) \varphi_k(t) dt = 0, \ \ k \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \gamma(t) A(t) dt \neq 0.$$

Итак, функционал $l(f) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \gamma(t) f(t) dt$ — искомый.

Пусть теперь область D — *вся плоскость*. Если функция $A(z)$ не принадлежит линейной оболочке M, то найдется круг $|z| < R < \infty$, в котором $A(z)$ не принадлежит линейной оболочке системы $\{\varphi_k(z)\}$. Тем самым все сводится к ранее рассмотренному случаю. ■